Tentamen Analyse op Variëteiten

27 juni 2011, 14:00-17:00 uur.

Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven. Per opgave is het maximaal aantal te behalen punten aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1. (25 pt.)
Voor $0 < a < 1$ is $M_a \subset \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$M_a = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2,\ x_3^2 + x_4^2 = 1 - a^2\}.$$

1. Toon aan dat M_a een twee-dimensionale deelvariëteit is van $\mathbb{R}^4$.

2. Bepaal een basis van T_pM_a, waarbij $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in M_a$.

3. Laat $0 < a, b < 1$. Toon aan dat M_a en M_b diffeomorf zijn.

Opgave 2. (20 pt.)
We generaliseren het standaard-inproduct $\langle v, w\rangle$ en het uitproduct $v \times w$ van vectoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ naar vectorvelden op $\mathbb{R}^3$, en wel als volgt. Voor $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ definiëren we $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ door

$$\langle X, Y\rangle(x) = \langle X(x), Y(x)\rangle,$$

voor $x \in \mathbb{R}^3$, en $X \times Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ door

$$(X \times Y)(x) = X(x) \times Y(x),$$

voor $x \in \mathbb{R}^3$. Beschouw de afbeelding $i : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ gegeven door $(i(X))(Y) = \langle X, Y\rangle$. Bewijs:

1. $i(\operatorname{grad} f) = df$

2. $i(X) \wedge i(Y) = \iota_{X\times Y}\Omega$, waarbij $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Z.O.Z.

Opgave 3. (25 pt.)

1. Als ω en η exacte differentiaalvormen zijn, dan is $\omega \wedge \eta$ exact. Toon dit aan.

2. Toon aan dat op $\mathbb{R}^3$ de 2-vorm η, gegeven door

$$\eta = x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz,$$

exact is, en bepaal een 1-vorm σ met $\eta = d\sigma$.

3. Toon aan dat op $\mathbb{R}^n$ de $(n-1)$–vorm ω, gegeven door

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{1}$$

exact is dan en slechts dan als n even is.

4. Laat ω weer gegeven zijn door (1). Bepaal een $(n-2)$–vorm α op $\mathbb{R}^n$ met $\omega = d\alpha$ als

(i) $n = 2$,

(ii) $n = 4$.

Opgave 4. (25 pt.)
In deze opgave zijn de eenheidsbol en de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\mathbb{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

en zijn de eenheidsbol en de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathbb{B}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Uiteraard geldt $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ en $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{B}^3$.

1. Laat de 1-vorm η op $\mathbb{S}^1$ gegeven zijn door $\eta = -y\, dx + x\, dy$.
Bereken $\int_{\mathbb{S}^1} \eta$ op twee manieren:

(i) rechtstreeks, d.w.z., uit de definitie van integraal van een differentiaalvorm;

(ii) met behulp van de stelling van Stokes.

2. Laat de 2-vorm ω op $\mathbb{S}^2$ gegeven zijn door $\omega = x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy$.
Bereken $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ op twee manieren:

(i) rechtstreeks, d.w.z., uit de definitie van integraal van een differentiaalvorm. Je mag gebruiken dat de 2-sfeer het beeld is van een (orientatie-bewarende) singuliere 2-keten $c : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, gedefiniëerd door

$$c(u, v) = (\sin \pi u \, \cos 2\pi v, \; \sin \pi u \, \sin 2\pi v, \; \cos \pi u).$$

(ii) met behulp van de stelling van Stokes.

3. Toon aan dat η (als in onderdeel 1) en ω (als in onderdeel 2) gesloten zijn, maar niet exact. (N.B.: opgevat als differentiaalvorm op $\mathbb{S}^1$ respectievelijk $\mathbb{S}^2$!)

Uitwerking

Opgave 1.
1. Let $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ be given by $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - a^2, x_3^2 + x_4^2 - 1 + a^2)$, then $M = F^{-1}(0, 0)$. The derivative $D_pF : T_p\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ at $p \in M$ has matrix

$$\begin{pmatrix} 2p_1 & 2p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_3 & 2p_4 \end{pmatrix},$$

and has maximal rank at every point of M. Therefore, M is a 2-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^4$.

2. The tangent space at T_pM is the kernel of D_pF. A basis is, e.g., $\{v_1, v_2\}$, where

$$v_1 = -p_2 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + p_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \quad \text{and} \quad v_2 = -p_4 \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_p + p_3 \left.\frac{\partial}{\partial x_4}\right|_p$$

3. Let $\phi_{a,b} : M_a \to M_b$ be given by

$$\phi_{a,b}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{b}{a}\, x_1, \frac{b}{a}\, x_2, \sqrt{\frac{1-b^2}{1-a^2}}\, x_3, \sqrt{\frac{1-b^2}{1-a^2}}\, x_4\right).$$

Then $\phi_{a,b}$ is the restriction of a linear map to M_a, so it is a C^∞-map. Furthermore, it is invertible, with inverse

$$\phi_{a,b}^{-1} = \phi_{b,a}.$$

Therefore, its inverse is also a C^∞ map. Hence, $\phi_{a,b}$ is a diffeomorphism.

Opgave 2. 1. The first part follows from a straightforward computation:

$$(i(\nabla f))(X) = \langle \nabla f, X \rangle = \langle \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle = \sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f).$$

2. The 2-form $i(X) \wedge i(Y)$ is of the form

$$i(X) \wedge i(Y) = a\, dx \wedge dy - b\, dx \wedge dz + c\, dy \wedge dz, \tag{2}$$

where a, b, c are smooth functions on $\mathbb{R}^3$. Therefore,

$$i(X) \wedge i(Y) = \iota_Z \Omega,$$

for $Z = a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial y} + c\,\frac{\partial}{\partial z}$. So we have to prove that $Z = X \times Y$. From (2) we derive

$$
\begin{aligned}
\langle Z, \frac{\partial}{\partial x}\rangle = a &= i(X) \wedge i(Y)\,(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \\
&= \begin{vmatrix} i(X)(\frac{\partial}{\partial y}) & i(X)(\frac{\partial}{\partial z}) \\ i(Y)(\frac{\partial}{\partial y}) & i(Y)(\frac{\partial}{\partial z}) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle X, \frac{\partial}{\partial y}\rangle & \langle X, \frac{\partial}{\partial z}\rangle \\ \langle Y, \frac{\partial}{\partial y}\rangle & \langle Y, \frac{\partial}{\partial z}\rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} \\
&= X_2Y_3 - X_3Y_2 \\
&= \langle X \times Y, \frac{\partial}{\partial x}\rangle.
\end{aligned}
$$

One similarly proves that the y- and $z-$ components of Z and $X \times Y$ are equal. Therefore, $Z = X \times Y$.

Opgave 3.

1. Let $\omega = d\alpha$, then $d(\alpha \wedge \eta) = d\alpha \wedge \eta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\eta = \omega \wedge \eta$.

2. It is easy to check that $d\eta = 0$. Furthermore,

$$\eta = (x\,dy + y\,dx) \wedge dz = d\,(xy) \wedge dz = d\,(xy\,dz),$$

so $\omega = d\sigma$ voor $\sigma = xy\,dz$.

3. We etermine $d\omega$ by a straightforward calculation:

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is even,} \\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

So ω is closed iff n is even. According to Poincaré's Lemma (on $\mathbb{R}^n$) the differential form ω is exact iff ω is closed, so iff n is even.

4. (i) If $n = 2$ then

$$
\begin{aligned}
\omega &= x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1 \\
&= d\,(x_1x_2).
\end{aligned}
$$

(ii) If $n = 4$ then

$$\begin{aligned}\omega &= (x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1) \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge (x_3\,dx_4 + x_4\,dx_3)\\ &= d\,(x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_4 + x_3x_4\,dx_1 \wedge dx_2).\end{aligned}$$

Opgave 4.

1. (i) The 1-sphere is a singular 1-chain $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, defined by $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Then $c^*\eta = 2\pi\,dt$, so

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{[0,1]} c^*\eta = \int_0^1 2\pi\,dt = 2\pi.$$

(ii) According to the theorem of Stokes we have

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{\partial\mathbb{B}^2} \omega = \int_{\mathbb{B}^2} d\omega = 2\int_{\mathbb{B}^2} dx \wedge dy = 2\,\mathrm{Opp}(\mathbb{B}^2) = 2\pi.$$

2. (i) A straightforward computation yields

$$\begin{aligned}c^*(dx) &= \pi\,(\cos \pi u\, \cos 2\pi v\, du - 2\, \sin \pi u\, \sin 2\pi v\, dv)\\ c^*(dy) &= \pi\,(\cos \pi u\, \sin 2\pi v\, du + 2\, \sin \pi u\, \cos 2\pi v\, dv)\\ c^*(dz) &= -\pi \sin \pi u\, du.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}c^*(x\,dy \wedge dz) &= 2\pi^2\, \sin^3 \pi u\, \sin^2 2\pi v\, du \wedge dv\\ c^*(y\,dx \wedge dz) &= -2\pi^2\, \sin^3 \pi u\, \cos^2 2\pi v\, du \wedge dv\\ c^*(z\,dx \wedge dy) &= 2\pi^2\, \sin \pi u\, \cos^2 \pi u\, du \wedge dv,\end{aligned}$$

so

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{[0,1]^2} c^*\omega = 2\pi^2 \int_{v=0}^1 \Big(\int_{u=0}^1 \sin \pi u\; du\Big)\, dv = 4\pi.$$

(ii) Since $d\omega = 3\,dx \wedge dy \wedge dz$, another application of the theorem of Stokes yields

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{\partial\mathbb{B}^3} \omega = \int_{\mathbb{B}^3} d\omega = 3\int_{\mathbb{B}^3} dx \wedge dy \wedge dz = 3\ \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^3) = 4\,\pi.$$

(iii) Every n-form on an n–dimensional manifold is closed, so, in particular, η and ω are closed. If an n-form on an n–dimensional manifold M without boundary (i.e., $\partial M = \emptyset$), is exact, say of the form $d\alpha$, then, by Stokes,

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0.$$

Therefore, neither η nor ω is exact.